

Campi algebricamente chiusi: una nota

Sia K un campo. Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:

- K è algebricamente chiuso;
- i polinomi irriducibili di $K[X]$ sono tutti e soli quelli di grado uno.

Infatti: se K è algebricamente chiuso, ogni polinomio non costante $f(X)$ di $K[X]$ ha almeno una radice in K , e quindi possiede un divisore di grado uno. Se $f(X)$ è irriducibile, coincide dunque con quel divisore a meno di un fattore costante non nullo, e quindi ha esso stesso grado uno.

Viceversa, se i polinomi irriducibili di $K[X]$ hanno tutti grado uno, allora, per il Teorema di fattorizzazione, ogni polinomio non costante di $K[X]$ si decompone nel prodotto di fattori lineari, e ciò significa che K è algebricamente chiuso.